Nuove tecnologie e studio delle grandezze che variano

Domingo Paola
Liceo scientifico "A. Issel" – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova
domingo.paola@tin.it

Summary

The currently available new technologies make possible new treatment of fundamental mathematics concepts. Innovations interest particularly the study of quantities and variation, that is the fundamental concepts of Calculus. These concepts can be introduced at school before the end of the compulsory school cycle. This paper will discuss an examples of a teaching – learning experiment that make use of Cabri géomètre with the aim of introducing students to the mathematics of change.

Riassunto

Le tecnologie oggi disponibili rendono possibile trattare in modo nuovo molti concetti matematici. Le innovazioni interessano in particolar modo lo studio delle grandezze che cambiano, ossia i concetti fondamentali dell'analisi matematica. Questi concetti possono essere introdotti con profitto anche prima della fine della scuola dell'obbligo. Questo lavoro discute un esempio di attività di insegnamento – apprendimento che utilizza Cabri – géomètre con lo scopo di avviare gli studenti allo studio delle grandezze che cambiano.

Nuove tecnologie e studio delle grandezze che variano

Domingo Paola
Liceo scientifico “A. Issel” – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova
domingo.paola@tin.it

Introduzione e quadro teorico

Nella prassi didattica italiana, compiti come quello di determinare una funzione che esprima la variazione di una grandezza rispetto a un’altra oppure come quello, conseguente, di studiare come tale funzione varia (cresce o decresce? E come cresce o decresce?), vengono quasi sempre proposti negli ultimi anni di scuola secondaria di secondo grado. Per lo studio di una funzione si sono quasi sempre richieste, come prerequisiti, tecniche di calcolo simbolico (risoluzione di equazioni e disequazioni, calcolo di limiti e di derivate), la cui necessità sembra oggi essere messa in dubbio dalla possibilità di disporre di strumenti di calcolo sempre più sofisticati e a buon mercato. James Kaput (Kaput, 2000) ha scritto che “We are early in an exciting new era for technology in Mathematics Education. Both the representational infrastructures are changing and the physical means for implementing them are changing. We are seeing new alphabets emerging, new visual modalities of human experience are being engaged and new physical devices are emerging – all at the same time. Much work need to be done[1]”.

Il lavoro, che insegnanti e ricercatori in educazione matematica devono compiere, consiste nello studiare limiti e potenzialità delle

[1] “Siamo all’inizio di una nuova eccitante era per l’uso della tecnologia nell’insegnamento – apprendimento della matematica. Stanno cambiando sia le modalità di rappresentazione degli oggetti matematici, sia i dispositivi fisici per realizzarle. Stanno venendo alla luce nuovi alfabeti, si stanno provando nuove modalità di visualizzazione per fare esperienze e nuovi dispositivi fisici sono ormai disponibili. Molto è il lavoro che dobbiamo compiere”.

nuove tecnologie: quali vecchi problemi consentono di risolvere? Quali risultano ormai obsoleti? Quali nuovi problemi pongono o consentono di porre? Come cambiano, se cambiano, i concetti matematici oggetto di studio? Si tratta di domande che non possiamo fare a meno di porci e alle quali è necessario dare risposte sensate, ossia sottoposte alla verifica dell'esperienza, ma, al tempo stesso, supportate da un quadro teorico che dia loro dignità di spiegazioni e non di semplici ipotesi ad hoc.
I software oggi disponibili consentono di ristrutturare e riorganizzare l'insegnamento – apprendimento di interi campi della matematica. Da alcuni anni mi sto occupando, in particolare, delle potenzialità che i manipolatori grafico – simbolici offrono per introdurre i concetti fondamentali del *Calculus* nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Ogni attività cognitiva, ogni processo di apprendimento è inevitabilmente mediato e influenzato dagli strumenti che si utilizzano. In particolare, nell'attività matematica esiste una stretta relazione tra le pratiche messe in atto per risolvere i problemi proposti e gli strumenti utilizzati. Se è vero, come affermano alcuni studiosi, (Chevallard, 1992) che i significati degli oggetti matematici sarebbero proprio le pratiche messe in atto per affrontare e risolvere problemi, allora è chiaro che un cambiamento delle pratiche, provocato dall'uso di differenti strumenti, può causare anche un cambiamento dei significati stessi degli oggetti matematici. In questo senso la tecnologia non solo non è neutrale, ma può essere il vettore di profondi cambiamenti nell'insegnamento – apprendimento della matematica (ovviamente non necessariamente positivi o auspicabili!). Io ritengo che i nodi concettuali del *Calculus* siano fra quelli maggiormente interessati a innovazioni didattiche consentite dall'uso delle nuove tecnologie.
Gli studi di David Tall confermano quanto appena detto: in Tall le nuove tecnologie vengono utilizzate per fondare la costruzione di significati dei concetti del *Calculus* su *radici cognitive* (Tall, 2002). In particolare, il concetto di linearità locale (ossia la proprietà che

hanno determinate funzioni di poter essere approssimate localmente con una funzione lineare) può essere fondato sulla radice cognitiva (geometrica – visiva) di grafico che assomiglia sempre più a quello di un segmento all'aumentare del numero di zoom effettuati. Il concetto di continuità puntuale può essere fondato sulla radice cognitiva di grafico stirabile orizzontalmente fino a diventare piatto (ossia fino a far sì che la sua oscillazione sia compresa in un pixel). Le relazioni tra derivazione e integrazione, espresse con il teorema fondamentale del calcolo, possono essere fondate sulle radici cognitive dell'area sottesa al grafico di una funzione su un intervallo chiuso e del grafico stirabile orizzontalmente. Per chi fosse interessato ad approfondire quanto ora detto, rimando a (Paola, 2005); per chi desiderasse vedere e utilizzare materiale didattico strutturato e sistematico suggerisco di collegarsi al sito web:
http://www.matematica.it/paola/Corso%20di%20matematica.htm,
dove si trova il progetto "Matematica in rete" al quale collaborano, oltre all'autore di questo articolo, anche Aurelia Orlandoni, Ercole Castagnola, Cristiano Dané, Michele Impedovo, Roberto Ricci e Luigi Tomasi. Con tale progetto ci proponiamo di mettere a disposizione di studenti e insegnanti materiali strutturati e sistematici, completi per i primi tre anni di scuola secondaria di secondo grado, che utilizzino le nuove tecnologie per un insegnamento – apprendimento sensato della matematica.

In questo lavoro mi propongo di presentare un'attività finalizzata all'introduzione dello studio della variazione di grandezze con Cabri géomètre, commentando alcune modalità di utilizzazione del software che, a mio avviso, offre maggiori potenzialità rispetto a quelle messe a disposizione dallo strumento carta e matita.

Gli elementi del quadro di riferimento teorico su cui si fonda questo lavoro e, più in generale, le attività di ricerca – azione portate avanti anche con il nucleo di ricerca didattica di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello, sono i seguenti:

a) le ricerche e i risultati relativi all'uso dei software di geometria dinamica come strumenti per fare matematica in senso lato e non solo geometria (Laborde & Mariotti, 2001; Furinghetti, Morselli & Paola, 2005);
b) le teorie dell'embodiment che affermano che la conoscenza matematica è largamente metaforica e le metafore utilizzate dipendono essenzialmente da come il nostro sistema senso – motorio interagisce con il mondo (Lakoff & Núñez, 2000);
c) la problematica relativa alle dinamiche artefatto – strumento e alla genesi strumentale (Rabardel, 1995; Verillon & Rabardel, 1995).

Particolare attenzione viene inoltre data, durante l'analisi delle videoregistrazioni delle attività didattiche, ai gesti degli studenti compiuti durante i lavori di gruppo o individuali (Arzarello & Edwards, 2005; Paola, 2006).

Attività didattica

Il problema seguente problema è stato posto a studenti di un secondo anno di liceo scientifico che seguono un corso di sperimentazione PNI:

è dato un filo di lunghezza l; lo si taglia in un punto P e, con le due parti ottenute, si costruisce una circonferenza e un quadrato. Studiare come varia, al variare del punto P, la somma delle aree del quadrato e del cerchio.

Gli studenti sono stati suddivisi a coppie e hanno lavorato in laboratorio di informatica con la possibilità di utilizzare il software Cabri géomètre, che conoscono fin dal primo anno di scuola secondaria di secondo grado e, in alcuni casi, dalla scuola secondaria di primo grado.

Durante la prima fase ho interagito in modo piuttosto pesante con i diversi gruppi, dando sovente indicazioni e suggerimenti piuttosto espliciti su come costruire un foglio di lavoro in Cabri utile a rappresentare adeguatamente la situazione proposta nel testo del problema, allo scopo di effettuare un'esplorazione significativa. Lo scopo di questi suggerimenti era quello di evitare che gli studenti dedicassero un tempo eccessivamente lungo alla costruzione di un foglio di lavoro che consentisse un'esplorazione efficace e suggestiva della situazione proposta. Dopo una quindicina di minuti, quindi, tutti i gruppi erano in grado di lavorare su un foglio come quello rappresentato in figura 1 (vedere i primi 21 punti della costruzione descritta in l'appendice).

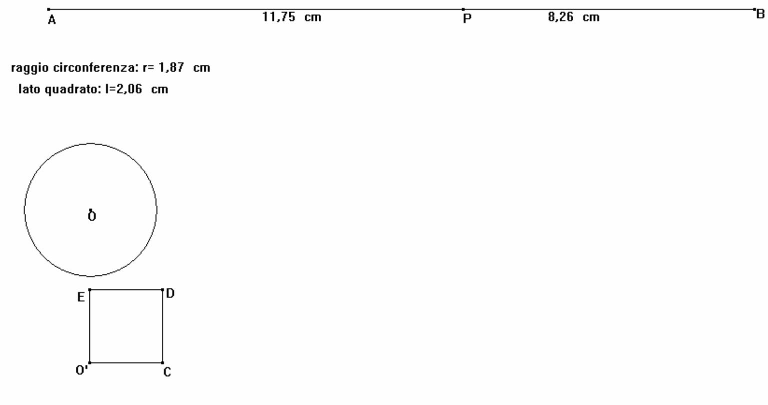
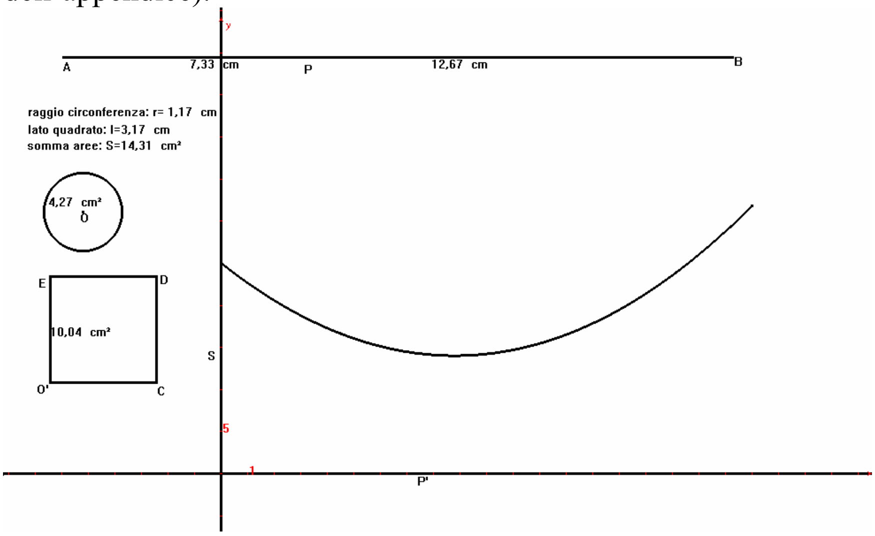


Figura 1

Con un foglio di lavoro di questo tipo gli studenti sono in grado, muovendo il punto P su AB di vedere che sia il cerchio, sia il quadrato cambiano. I primi commenti sono una mera descrizione di ciò che stanno osservando: rimangono a un livello essenzialmente percettivo. "Se muovo P si muovono sia la circonferenza, sia il quadrato"; " se P coincide con A scompare la circonferenza, mentre se P coincide con B scompare il quadrato".
Il passo successivo, che i vari gruppi compiono autonomamente, è quello di determinare l'area del cerchio e quella del quadrato, per poi calcolarne la somma con lo strumento calcolatrice (passi 22, 23 e 24 descritti in appendice). Lo strumento "misura dell'area" consente agli studenti di passare da un livello descrittivo meramente percettivo a uno di tipo relazionale in cui si evidenzia esplicitamente e chiaramente la dipendenza della somma delle aree

dalla misura di AP. Due gruppi di studenti, animando il punto P, si accorgono che i numeri che esprimono la variazione della somma delle aree al variare di P non variano con velocità costante: diminuiscono sempre meno velocemente mentre P si sposta da A verso B, fino a raggiungere un valore minimo in cui la variazione della somma delle aree sembra quasi fermarsi, per poi riprendere ad aumentare sempre più velocemente, fino a raggiungere un massimo assoluto quando P coincide con B. Si tratta di un livello descrittivo molto più raffinato: gli studenti non si accontentano di affermare la dipendenza funzionale della somma delle aree dalla lunghezza di AP, ma esprimono valutazioni sul *come* varia ("decresce sempre meno fino a raggiungere un minimo e poi cresce sempre più fino a raggiungere il massimo assoluto").

Poiché non tutti i gruppi riescono a effettuare osservazioni di questo tipo, può essere utile invitare gli studenti a inserire nel foglio di lavoro un piano cartesiano per rappresentarvi il grafico della somma delle aree al variare di AP (figura 2 e punti 25 – 32 dell'appendice).



Le risorse mese a disposizione da Cabri hanno consentito agli studenti di rispondere in modo piuttosto esauriente alla richiesta del problema: hanno espresso valutazioni sulle caratteristiche della crescenza della funzione, sul suo punto di minimo e di massimo assoluto, individuando perfettamente il massimo assoluto e con buona precisione il minimo. È vero che sono rimasti unicamente al livello descrittivo numerico, grafico e del linguaggio naturale, ma la descrizione è piuttosto ricca ed esauriente rispetto alle richieste del problema. In un certo senso, Cabri sembra aver inibito il ricorso al piano simbolico, alle formule. Nessun gruppo di studenti ha pensato, lavorando in Cabri, di determinare una formula che esprimesse la variazione della somma delle aree al variare di AP, eppure si tratta di studenti non estranei al ricorso al linguaggio simbolico quando lavorano in ambiente carta e matita. Il rischio che i gruppi di lavoro si sentano appagati dalla risoluzione proposta e quindi non tentino nemmeno di determinare un'espressione che rappresenti la variazione della somma delle aree al variare di AP, può essere ridotto se si ha la costanza di chiedere agli studenti di giustificare le valutazioni espresse grazie alle risorse mese a disposizione da Cabri. Il contratto didattico, che deve essere esplicito e trasparente, è che le giustificazioni non devono essere di tipo empirico – percettivo o fondate sulle potenzialità e sulle risorse messe a disposizione dal software, ma vanno ricercate nella teoria, ossia nell'insieme di conoscenze che gli studenti vanno via via costruendo nella loro esperienza scolastica. La ricerca di una formula in cui poter poi riconoscere regolarità e proprietà già studiate e dimostrate occupa quindi la fase finale del lavoro. Questo lavoro è in ogni caso condotto all'interno della teoria: infatti anche se si utilizzasse il software Cabri II plus, che consente di avere l'equazione del luogo, non si otterrebbe un'equazione che dà la variazione della somma delle aree al variare di x e del parametro l (lunghezza del filo), ma solo una particolare funzione per il particolare valore di l presente sul foglio di lavoro. Non tutti i gruppi riescono a determinare la funzione quadratica $y=\frac{\pi+4}{16\pi}x^2-\frac{l}{8}x+\frac{l^2}{16}$ e meno ancora riescono poi a individuare che il minimo della somma delle aree si ha per $x = \dfrac{\pi l}{\pi + 4}$: tutti gli studenti, però, anche quelli con maggiori difficoltà, sono riusciti a utilizzare le risorse del software per rispondere alla domanda del problema. In altri termini, tutti hanno dimostrato di sapere *come* fare, anche se pochi sono poi riusciti a spiegare *perché* le strategie risolutive adottate funzionano. Per l'insegnante si apre un'interessante occasione per una sfida didattica molto importante: far riflettere gli studenti sul fatto che anche se le risorse messe a disposizione dalle nuove tecnologie forniscono un significativo aiuto per risolvere problemi, non si deve perdere di vista la necessità del loro controllo, dell'esercizio del pensiero critico che solo un consapevole riconoscimento dell'importanza del pensiero teorico può rendere davvero possibile.

Bibliografia

Arzarello, F & Edwards, L. :2005, *Gesture and the Construction of Mathematical Meaning,* Proceedings of PME 29, Melbourne, Research Forum 02, Vol. 1, 122-145.

Chevallard, Y.: 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche antropologique, *Recherches en Didactique des Matématiques*, 12 (1), 73 - 112.

Furinghetti, F., Morselli, F. & Paola, D.: 2005, Interaction of modalities in Cabri: a case study, Proceedings of PME 29, Melbourne, v.3, pp.9-16.

Kaput, J.: 2002, Implications of the Shift from Isolated, Expensive Technology to Connected, Inexpensive, Divers and Ubiquitous Technologies, in (Fernando Hitt editors) *Representations and Mathematics Visualization*, Mexico, p. 80 – 109.

Laborde, C. & Mariotti, M.: 2001, Grounding the notion of function and graph in DGS, *Cabriworld 2001*, Montreal.

Lakoff, G. & Núñez, R: 2000, *Where Mathematics Comes From*, Basic Books, traduzione italiana *Da dove viene la matematica.*

Come la mente embodied dà origine alla matematica, Bollati Boringhieri, 2005.
Paola, D.: 2005, L'insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano, *Progetto Alice*, vol. VI, n. 16 43 - 87.
Paola, D.: (2006), Il significato di crescita esponenziale in un ambiente di geometria dinamica, *La matematica e la sua didattica,* n.1, 39 - 58.
Rabardel, P. : 1995, *Les hommes et les technologies*, Armand Colin, Paris.
Tall, D.: 2002, Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics, First Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica at Universidade do Estado do Rio De Janiero, disponbile al sito http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/.
Vérillon, P. & Rabardel, P.: 1995, Artefact and cognition: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, vol. IX, n°3.

Appendice: la costruzione del foglio di lavoro in Cabri.

1. Segmento AB
2. Punto P su AB
3. Segmento AP
4. Segmento PB
5. Misura di AP
6. Misura di PB
7. Calcolatrice: $\frac{AP}{2\pi}$ (raggio della circonferenza)
8. Calcolatrice: $\frac{PB}{4}$ (lato del quadrato)
9. Semiretta di origine O

10. Trasporto di $\frac{AP}{2\pi}$ sulla circonferenza
11. Circonferenza di centro O e raggio $\frac{AP}{2\pi}$
12. Semiretta di origine O’
13. Trasporto di $\frac{PB}{4}$ sulla semiretta di origine O’ individuando il lato OC del quadrato
14. Perpendicolare per C alla semiretta di origine O’
15. Circonferenza di centro C e raggio CO’
16. Intersezione D tra la circonferenza determinata in 15 e la perpendicolare in 14
17. Perpendicolare per O’ a O’C
18. Perpendicolare per D a DC
19. Intersezione E fra le due perpendicolari costruite in 17. e 18.
20. Poligono O’CDE
21. Nascondere tutto tranne la circonferenza di centro O, il quadrato O’CDE e i segmenti AP e PB
22. Area del cerchio
23. Area del quadrato
24. Calcolatrice: somma delle due aree
25. Mostra gli assi
26. Trasporto della somma delle aree S sull’asse y (sul quale si è eventualmente modificata l’unità di misura)
27. Trasporto della misura di AP sull’asse x (sul quale si modifica eventualmente l’unità di misura), individuando il punto P’ sull’asse x
28. Perpendicolare per P’ all’asse x
29. Perpendicolare per S all’asse y
30. Punto L di intersezione delle perpendicolari determinate in 28. e 29
31. Luogo di L al variare di P
32. Nascondere le due perpendicolari trovate in 28. e 29